L'opera di Viète

Anche Francois Viète si occupò del calcolo di π; ma se i suoi risultati pratici devono essere considerati notevolmente inferiori rispetto a quelli ottenuti da Van Ceulen e da Snell, tuttavia Viète, nel 1593, ricavò un'importante formula per il calcolo di π. Tale formula, che presenteremo, inaugurò un ampio ed importante settore di ricerca riguardante le approssimazioni di π: quello dei prodotti infiniti e delle serie numeriche, metodi per i quali la precisione del valore approssimato ottenuto dipendeva essenzialmente dal numero di fattori o di addendi considerati.

Impostando la propria ricerca su poligoni regolari di 4, 8, 16... lati, Viète giunse all'espressione che può essere modernamente indicata con il prodotto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90°}{2} \cdot \cos\frac{90°}{4} \cdot \cos\frac{90°}{8} \ldots$$

ovvero:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

Ad esempio, i valori approssimati di π ricavati arrestando il precedente prodotto rispettivamente al primo, al secondo ed al terzo fattore (i risultati di seguito riportati sono troncati alla terza cifra decimale) vengono ad essere:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{approssimazione } \pi\text{: } 2{,}828$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} \quad \text{approssimazione } \pi\text{: } 3{,}061$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}} \quad \text{approssimazione } \pi\text{: } 3{,}121$$

L'espressione per π proposta da Viète merita un attento esame; consideriamo innanzitutto la successione, definita ricorsivamente ($\forall n \in \mathbf{N}$):

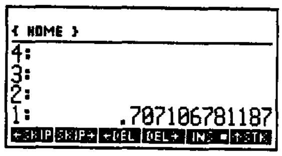
$$\begin{cases} b_0 = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \\ b_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot b_n} \end{cases}$$

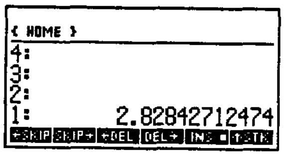
e quindi la successione definita da ($\forall n \in \mathbf{N}$):

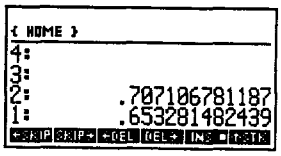
$$a_n = \prod_{k=0}^{n} b_k$$

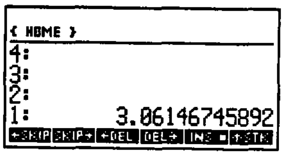
Detto l il limite di questa successione, possiamo ricavare π ponendo: $\pi = \dfrac{2}{l}$.

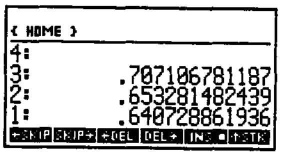
Da quanto finora emerso, l'algoritmo proposto da Viète sembra essere efficace (seppure la sua convergenza non sia rapidissima); per verificare l'utilità di tale espressione è necessario ricorrere ad una calcolatrice tascabile; riportiamo i primi risultati dell'approssimazione:

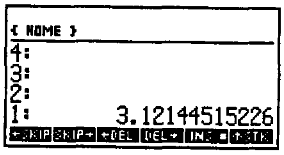
valore a_o: 

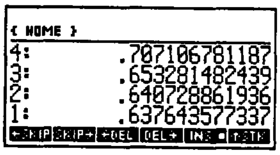
approssimazione π: 

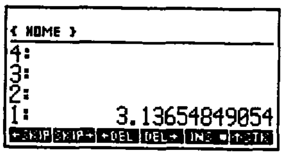
valore a_1: 

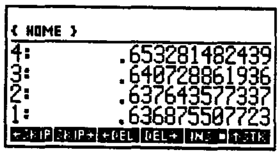
approssimazione π: 

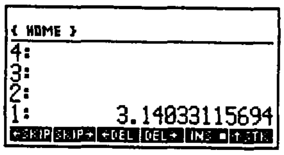
valore a_2: 

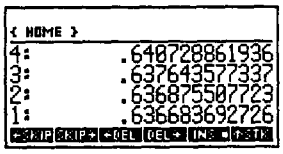
approssimazione π: 

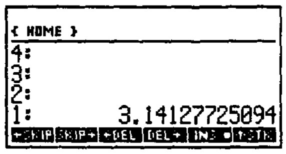
valore a_3: 

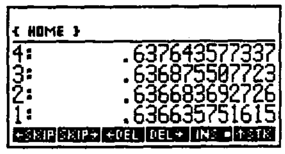
approssimazione π: 

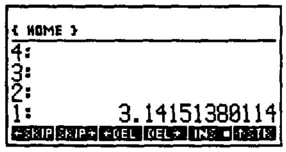
valore a_4: 

approssimazione π: 

valore a_5: 

approssimazione π: 

valore a_6: 

approssimazione π: 

Sottolineiamo ancora la fondamentale innovazione concettuale collegata al prodotto infinito indicato da Viète per il calcolo di π: al tentativo di determinare il massimo numero possibile di cifre decimali (spesso fine a se stesso, tenacemente perseguito al fine di evidenziare le capacità di calcolo), si affiancò la più moderna proposta di algoritmi esatti (ma *infiniti*), grazie ai quali fu possibile calcolare il valore di π con una precisione dipendente dal numero dei passi eseguiti. Dal punto di vista storico, si trattò di una svolta decisiva.

Dopo Viète

Tra gli algoritmi infiniti (serie numeriche, prodotti infiniti, frazioni continue) che permettono il calcolo di π, citiamo ancora alcune celebri espressioni:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots$$ Wallis (1655)

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ldots}}}}$$ Brouncker (1660)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots$$ Gregory e Leibniz (1674)

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$ Euler (1736)

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$ Ramanujan (1914)